TD Révisions PTSI

Optique Géométrique

Lois de Descartes

Exercice 1 - Prismes accolés

1. La formule de Snell-Descartes au point I_1 est :

$$N \times \sin(45) = n \times \sin(r)$$

Soit

$$\boxed{N\frac{\sqrt{2}}{2} = n \times \sin(r)}.$$

La formule de Snell-Descartes au point I_3 est :

$$\boxed{n \times \sin(\beta) = n_{air} \times \sin(i)}.$$

2. Le triangle BI_1I_2 est rectangle en B, on peut donc écrire :

$$90 = 90 - \alpha + 90 - r$$

Soit

$$\boxed{\alpha + r = 90}.$$

3. L'angle que fait le rayon réfléchi en I_2 avec la normale est α d'après la première loi de Descartes.
De plus, l'angle $\widehat{I_2CI_3}$ mesure 45°, sachant que la somme des angles d'un triangle fait 180°, on peut écrire :

$$180 = 45 + 90 - \alpha + 90 - \beta$$

Soit

$$\boxed{\alpha + \beta = 45}.$$

4. Si la réflexion en I_2 est totale, alors on peut écrire :

$$\sin(\alpha) = \frac{n_{air}}{n}$$

De plus, d'après la formule trouvée en question 2., on peut écrire :

$$\sin(90 - r) = \frac{n_{air}}{n}$$

Soit

$$\cos(r) = \frac{n_{air}}{n}$$

Ainsi, en élevant au carré la formule de Snell-Descartes écrite au point I_1 et en l'ajoutant à celle qu'on vient d'obtenir élevée également au carré, on trouve :

$$\frac{2}{4}N^2 + n_{air}^2 = n^2 \times \left(\sin^2(r) + \cos^2(r)\right)$$

Or, pour tout angle γ, $(\sin^2(\gamma) + \cos^2(\gamma)) = 1$ donc on peut simplifier l'expression précédente ainsi :

$$N^2 + 2n_{air}^2 = 2n^2$$

Soit

$$N^2 = 2(n^2 - n_{air}^2)$$

Etant donnée la donnée de l'indice de l'air, on peut écrire :

$$\boxed{N^2 = 2(n^2 - 1)}.$$

5. On cherche les conditions permettant d'obtenir $i = 0$. Nous allons donc supposer $i = 0$ et trouver les conditions.

   D'après la formule de Snell-Descartes écrite au point I_3, on trouve que $\sin(\beta) = 0$ donc $\beta \equiv 0[2\pi]$. D'après le résultat de la question 3., on obtient que $\alpha \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$. Enfin, d'après le résultat de la question 2., $r \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.
   La formule de Snell-Descartes écrite au point I_1 permet alors de conclure :

$$N = n$$

   D'après le résultat de la question 4., on obtient finalement que :

$$-N^2 = -2n_{air}^2$$

   Or, comme un indice optique est une grandeur positive :

$$N = \sqrt{2}n_{air}$$

   L'A.N. donnne :

$$\boxed{N = \sqrt{2}}$$

Exercice 2 - Fibre optique

1. Pour que le rayon lumineux soit guidé dans le cœur, il faut qu'il subisse une réflexion totale à l'interface cœur / gaine. Comme l'indice du cœur est supérieur à celui de la gaine, il faut que l'angle i soit suffisamment grand pour qu'il n'y ait pas de rayon réfracté. D'après le résultat du cours, on trouve la condition suivante :

$$\boxed{i > \arcsin\left(\frac{n_g}{n_c}\right)}.$$

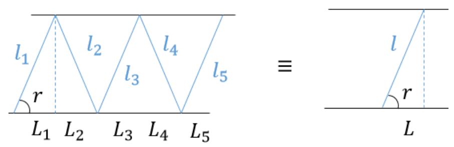
   Pour les valeurs de l'énoncé, on trouve $i_c = 75,56°$.

2. Ici, on considère la réfraction à l'interface air / cœur. La relation de Snell-Descartes donne :
$$n_{air} \times \sin(\theta) = n_c \times \sin(r)$$
Or, on observe bien la formation d'un triangle rectangle entre la normale à la première réflexion, l'axe de la fibre et le rayon lumineux, on peut écrire la relation suivante dans ce triangle :
$$90 = r + i$$
On en déduit donc la modification suivante de la loi de Snell-Descartes à l'entrée dans la fibre :
$$n_{air} \times \sin(\theta) = n_c \times \cos(i)$$
La condition sur θ est donc la suivante :
$$n_{air} \times \sin(\theta_0) = n_c \times \cos(i_c)$$
Soit
$$\sin(\theta_0) = \frac{n_c}{n_{air}} \times \cos(\arcsin\left(\frac{n_g}{n_c}\right))$$
Or, pour tout réel x de [-1,1], $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$, donc :
$$\boxed{\theta_0 = \arcsin\left(\frac{n_c}{n_{air}} \times \sqrt{1-\left(\frac{n_g}{n_c}\right)^2}\right)}$$

3. Pour une fibre à silicone/silice, on obtient :
$$n_a \sin(\theta_0) = 0,363.$$
Pour une fibre à arséniure de gallium, on obtient :
$$n_a \sin(\theta_0) = 2,492.$$
On peut remarquer deux choses :
   - une fibre à arséniure de gallium a une ouverture numérique beaucoup plus grande que la fibre à silicone/silice. Cela permet de transmettre des faisceaux lumineux plus ouverts en acceptant les rayons de plus forte inclinaison. C'est compréhensible étant donnée la forte différence d'indice entre le cœur et la gaine dans le cas de la fibre à arséniure de gallium. Cependant, on peut faire la remarque que plus la fibre transmet de rayons inclinés, moins la fréquence de transmission sera élevée par risque de brouillage entre un bit d'information et le précédent.
   - le milieu dans lequel l'entrée de la fibre est plongée influe sur l'ouverture numérique. C'est un phénomène qui est surtout utilisé en microscopie où l'on cherche à augmenter l'ouverture en utilisant des liquides d'indices supérieurs à celui de l'eau (comme de l'huile) qu'on place sur les objectifs dits "à immersion".

4. Le temps de parcours de la lumière dans la fibre est minimum lorsque la distance à parcourir est la plus faible, c'est à dire pour $\theta = 0$. La distance parcourue dans la fibre est alors directement L, longueur de la fibre.

   De même, le temps de parcours est maximum pour $\theta = \theta_l$, c'est à dire lorsque le rayon lumineux est le plus incliné et subit le plus de réflexions.



On a alors $\cos r = \frac{L}{l} \Rightarrow \sin i = \frac{L}{l}$

Or $\sin i_l = \dfrac{n_g}{n_c}$. Ainsi,

$l = \dfrac{L}{\sin i_l} = \dfrac{n_c L}{n_g} \Rightarrow \delta t = \dfrac{l}{v} - \dfrac{L}{v} = \dfrac{n_c L}{n_g v} - \dfrac{L}{v} = \dfrac{n_c^2 L}{n_g c} - \dfrac{n_c L}{c}$

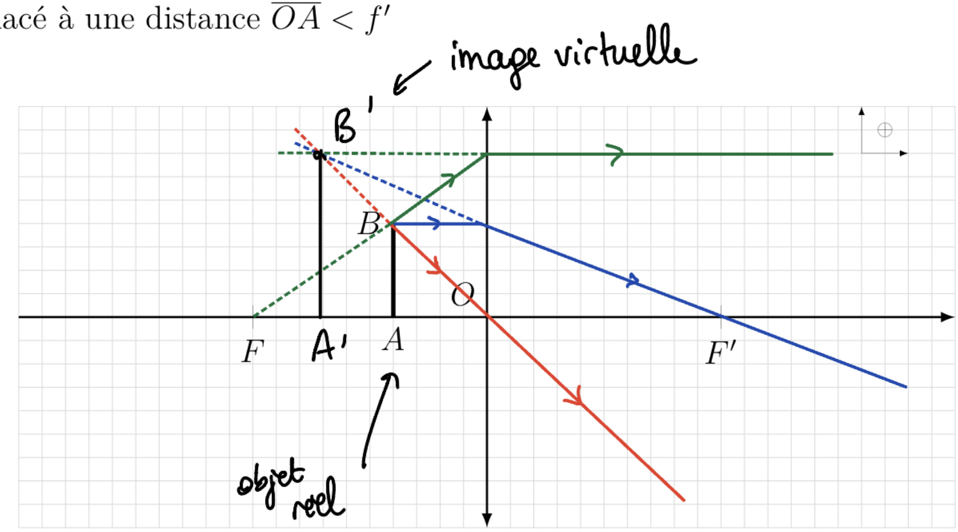
On obtient :

$$\boxed{\delta t = \frac{L n_c (n_c - n_g)}{c n_g}}$$

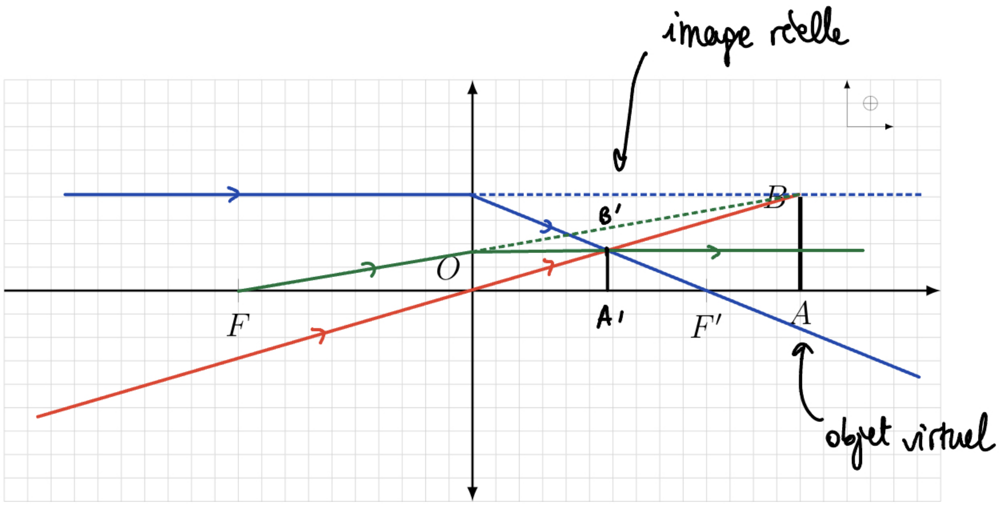
Lentilles

Exercice 3 - Quelques constructions

Objet réel placé à une distance $\overline{OA} < f'$

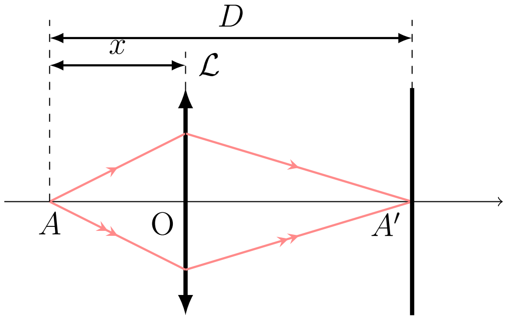


Objet virtuel



Exercice 4 - Méthode de Bessel

1. cours PTSI :



Appliquons la formule de conjugaison de Descartes, ayant $\overline{OA} = -x$ et $\overline{OA'} = D - x$.

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \Leftrightarrow \frac{1}{D-x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f'} \Rightarrow x^2 - xD + Df' = 0$$

$\Delta = D^2 - 4f'D = D(D-4f') > 0$ car $D > 4f'$. Il existe donc deux solutions pour la position de la lentille.

2. Exprimer d grâce aux solutions de l'équation obtenue question 1. *Solution* : $f' = \dfrac{D^2 - d^2}{4D}$

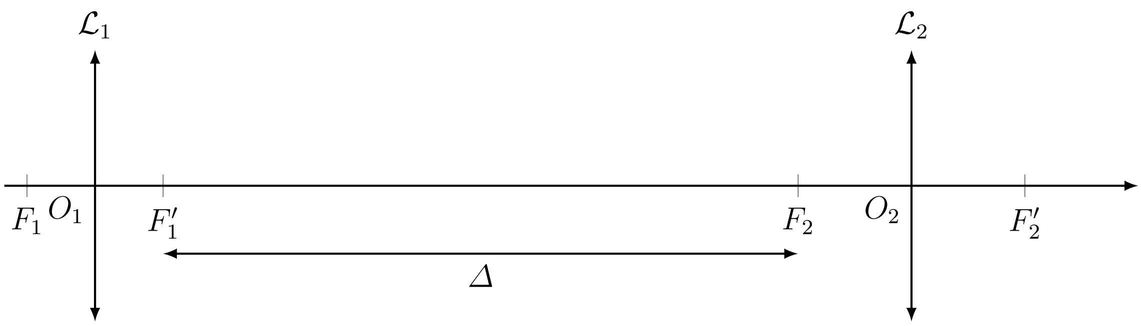
3. $\gamma_1 = \dfrac{1}{\gamma_2}$

Systèmes optiques

Exercice 5 - Appareil photo

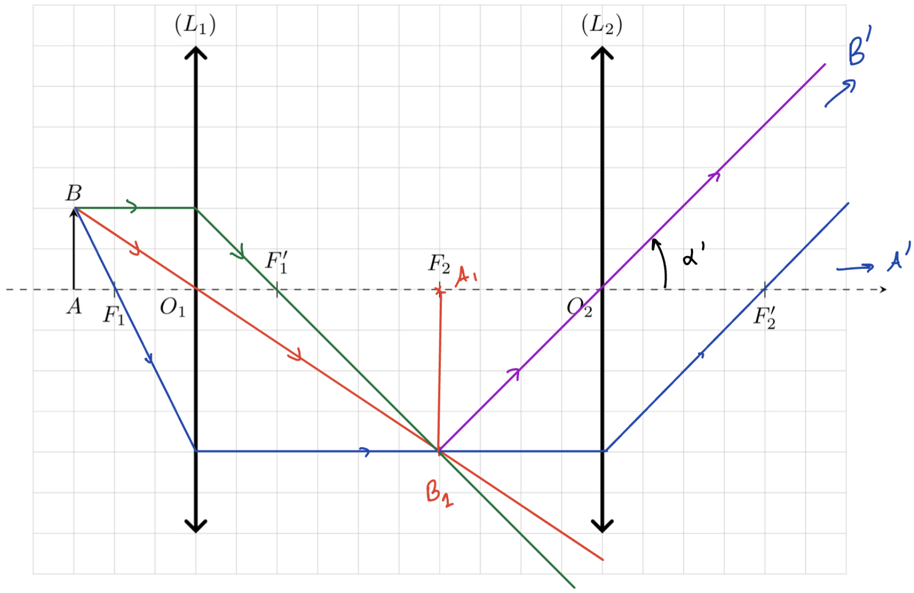
1. (a) On trouve $\overline{OA'} = 0,0505$ m. Il faut donc reculer la pellicule de 0,05 cm.
   (b) On trouve $\overline{OA} = -55$ cm. Au plus près, on peut donc photographier un objet à 55 cm de l'appareil photo.
2. 2,34 m $\times$ 3,56m

Exercice 6 - Microscope



Modélisation du tube optique

1. Pour que l'observateur ne se fatigue pas en regardant dans le microscope, il faut que l'image finale A' soit à l'infini. Pour cela, il faut que l'image intermédiaire A_1 se situe sur le foyer principal objet de l'oculaire, soit en F_2.
   $A \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A_1$ donc on peut écrire la relation de Descartes : $\dfrac{1}{\overline{O_1A_1}} - \dfrac{1}{\overline{O_1A}} = \dfrac{1}{f_1'}$
   Notons $d = -\overline{O_1A}$ la distance à laquelle il faut placer l'objet avant l'objectif.
   Par ailleurs $\overline{O_1A_1} = \overline{O_1F_2} = \overline{O_1F_1'} + \overline{F_1'F_2} = \Delta + f_1'$ d'où
   $$\frac{1}{\Delta + f_1'} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f_1'}$$
   et
   $$\boxed{d = \frac{f_1'(\Delta + f_1')}{\Delta}}$$
   A.N. : $d = \dfrac{5(170+5)}{170}$ =5,14mm



2.
3. $\gamma_1 = \dfrac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} = \dfrac{\Delta + f_1'}{d}$
   $$\boxed{\gamma_1 = -\frac{\Delta}{f_1'} = -\frac{170}{5} = -34}$$
4. On a d'après la figure $\tan(\alpha') = -\dfrac{\overline{A_1B_1}}{f_2'} \simeq \alpha'$ (car les angles sont petits dans l'approximation de Gauss)
   Or, on sait que $\gamma_1 = \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}}$
   Donc $\boxed{\alpha' = -\dfrac{\gamma_1.\overline{AB}}{f_2'}}$
5. On a $G_C = \dfrac{\alpha'}{\alpha}$ où α est l'angle sous lequel serait vu l'objet sans le microscope à l'œil nu à une distance $d_m = 250$ mm.
   On a $\tan(\alpha) = \dfrac{\overline{AB}}{d_m} \simeq \alpha$ (car les angles sont petits).

Par ailleurs, on a $\alpha' = -\dfrac{\gamma_1.\overline{AB}}{f'_2}$

Donc $\boxed{G_C = -\dfrac{\gamma_1.d_m}{f'_2}}$

Par ailleurs, $P_i = \dfrac{G_C}{d_m} = -\dfrac{\gamma_1}{f'_2}$